数理解析研究所講究録 1402 巻 2004 年 1-20

半空間における特別な熱伝導方程式

島倉紀夫　(Norio Shimakura)

退化する楕円型偏微分方程式の研究を始めた頃に筆者が興味をもった方程式の一つは, n 次元半空間 $\mathbf{R}^n_+ = \{x \in \mathbf{R}^n;\, x_1 > 0\}$ $(n \geq 2)$ における次のような熱伝導方程式であった ([$\mathrm{Sh}_{1,2,3,4}$]).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \qquad (x \in \mathbf{R}^n_+,\ t > 0). \tag{1}$$

右辺の作用素は $\mathbf{R}^n_+$ の各点では楕円型だが, 境界 $\{x_1 = 0\}$ の各点ではすべての方向に退化する. 有界領域においてこのような性質をもつ作用素の固有値の漸近分布法則はもはや H.Weyl の法則のようにはならない. 放物型方程式にせよ楕円型方程式にせよ, 基本解を構成する通常の手法は必ずしも通用しない. そのような方程式のうちで, 時空の相似変換と領域の合同変換で不変という特徴を備えた最も簡単な方程式の 1 つが (1) である.

本稿では方程式 (1) の基本解およびそれに付随した計量を考察する. その当時, 基本解を求めようとしたができなかった. その原因は, 実は (1) ではなく

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - x_1 u$$

という方程式を考察していたからである. $-x_1 u$ という項を付け加えると可解性を調べるには好都合であった. しかし, この項が方程式 (1) の折角の幾何学的特性を壊してしまい基本解の計算の障害になっていたのである. 二本の方程式を柔軟に使い分けていればよかった. 問題はよく考えて作らねばならない.

藤家雪朗氏にこの短期共同研究に誘っていただいて再びこの計算をした. 方程式 (1) の基本解は, 通常の Poisson 核 ((6) 式参照) に初等的な演算を施せば得られる. これが本稿の結論である. もっと簡単な計算法もあるに違いない. 今では計算などしなくても一般理論を機械的に適用すればほんの数行で基本解が書き下せるのかも知れない. 諸氏のご批判を賜りたい.

藤家雪朗氏に厚く御礼申し上げる.

§1　方程式 (1) の基本解

方程式 (1) の基本解を $K(x,y,t)$ とする．すなわち，

$$u(x,t)=\int_{R_+^n}K(x,y,t)f(y)dy$$

が $\lim_{t\downarrow 0}u(x,t)=f(x)$ をみたす (1) の解となるような核 K である．通常の通り $x'=(x_2,\cdots,x_n)$, その双対変数を $\xi'=(\xi_2,\cdots,\xi_n)$ と書く．

一つの基本解は Fourier 変換 $x'\mapsto\xi'$ を用いると得られる．

$$K(x,y,t)=\int_{R^{n-1}}e^{i\langle x'-y',\xi'\rangle}\hat{K}(x_1,y_1,\xi',t)\,\bar{d}\xi'\quad(\bar{d}\xi'=(2\pi)^{1-n}d\xi'),\tag{2}$$

$$\hat{K}(x_1,y_1,\xi',t)=\frac{\rho}{\sinh\rho t}I_0\Big(\frac{2\rho\sqrt{x_1y_1}}{\sinh\rho t}\Big)\exp\Big\{-\frac{\rho(x_1+y_1)}{\tanh\rho t}\Big\}\quad(\rho=|\xi'|).$$

ただし, $I_0(z)=\sum_{p=0}^{\infty}z^{2p}/(4^pp!^2)$ (0 次変形 Bessel 函数) である．K は (x,y,t) に関して $-n$ 次斉次である ($c>0$ ならば $K(cx,cy,ct)=c^{-n}K(x,y,t)$)．

(2) を確かめるには u を $x_1\leq 0$ では 0 と拡張してから $x_1,x_2,\cdots,x_n$ に関して Fourier 変換する．その像を $\mathcal{F}u$ で表すと (1) は 1 階の方程式になる．

$$\frac{\partial\mathcal{F}u}{\partial t}+i({\xi_1}^2+\rho^2)\frac{\partial\mathcal{F}u}{\partial\xi_1}+i\xi_1\mathcal{F}u=0\ \ (t>0),\quad \mathcal{F}u(\xi,0)=\mathcal{F}f(\xi).$$

$\mathcal{F}u$ も $\mathcal{F}f$ も下半平面 $\Im\xi_1<0$ では正則である．特性曲線に沿って解けば

$$\mathcal{F}u(\xi_1,\xi',t)=\frac{\rho}{i\xi_1\sinh\rho t+\rho\cosh\rho t}\mathcal{F}f\Big(\frac{\rho\xi_1\cosh\rho t-i\rho^2\sinh\rho t}{i\xi_1\sinh\rho t+\rho\cosh\rho t},\xi'\Big).$$

こうして (2) が導かれるが, 逆 Fourier 変換の実行が本稿の目的である．

Laguerre の多項式を $L_m(z)$ で表して (§2 参照)

$$w_m(x_1,\rho)=\sqrt{2\rho}\,L_m(2\rho x_1)e^{-\rho x_1}\quad(\rho>0,\ m=0,1,2,\cdots)\tag{3}$$

とおくと $\{w_m\}_{m=0}^{\infty}$ は実数値函数の列で $L^2(0,+\infty)$ の完全正規直交系をなし,

$$\hat{K}(x_1,y_1,\xi',t)=\sum_{m=0}^{\infty}e^{-(2m+1)\rho t}w_m(x_1,\rho)w_m(y_1,\rho).\tag{4}$$

((11) 式参照). $|w_m(x_1,\rho)|\le\sqrt{2\rho}$ だから $\hat{K}$ は ξ' に関して $\mathbf{R}^{n-1}$ で絶対可積分である. (4) は (2) の別証明である. ここまでは [Sh$_1$] の結果である.

次に, $t>0, x_1\ge 0, y_1\ge 0, x_1+y_1>0$ ならば $\hat{K}$ は ξ' の急減少函数, K は $x'-y'$ の急減少函数であることを示す. $I_0(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{z\cos\theta}d\theta$ という表現を用い, ここだけの記号だが $p=\frac{\rho}{\sinh\rho t}$, $q=\frac{\rho}{\tanh\rho t}$ とおくと

$$\hat{K}(x_1,y_1,\xi',t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p\,\exp\{2\sqrt{x_1y_1}q\,\cos\theta-(x_1+y_1)q\}d\theta.$$

p,q は ξ' の実解析函数でつねに正の値をとり, $\xi'=0$ の近傍ではともに $\frac{1}{t}$ に近く, 遠方では p は殆ど 0 で q は ρ に近い. 上の被積分函数の指数の肩は

$$\begin{aligned}&2\sqrt{x_1y_1}p\,\cos\theta-(x_1+y_1)q\\&\quad=-(x_1+y_1)\rho\tanh\tfrac{\rho t}{2}-\{(\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1})^2\sin^2\tfrac{\theta}{2}+(\sqrt{x_1}-\sqrt{y_1})^2\cos^2\tfrac{\theta}{2}\}p.\end{aligned}$$

故に, $t>0, x_1\ge 0, y_1\ge 0, x_1+y_1>0$ ならば $\hat{K}(x_1,y_1,\xi',t)$ は ξ' の急減少函数, $K(x,y,t)$ は $x'-y'$ の急減少函数である. K は実数値の対称核で

$$\hat{K}(x_1,y_1,0,t)=\tfrac{1}{t}I_0\left(\tfrac{2\sqrt{x_1y_1}}{t}\right)e^{-\frac{x_1+y_1}{t}},\qquad\int_0^{+\infty}\hat{K}(x_1,y_1,0,t)dy_1=1$$

であるから

$$\int_{R_+^n}K(x,y,t)dy=\int_{R_+^n}K(x,y,t)dx=1.\tag{5}$$

さらに, 至るところ $K(x,y,t)\ge 0$ であることを示す. 仮に, $K(a,b,t^0)<0$ となる $\mathbf{R}_+^n$ の 2 点 a,b と正の t^0 があるとすると, $\mathbf{R}_+^n$ で C^∞-級, 至るところ非負で小さな台をもつある函数 $f(x)$ をとれば, $Kf(a,t^0)<0$ である. 他方, $t\downarrow 0$ のとき $Kf(x,t)$ は一様に $f(x)(\ge 0)$ に収束し, $t\uparrow+\infty$ のときは一様に 0 に収束する (K が $-n$ 次斉次だから). しかも, $0<t^1<t^2<+\infty$ をみたす任意の t^1,t^2 をとると, $t^1\le t\le t^2$ では $|x'-y'|\to+\infty$ または $x_1\to+\infty$ のとき $|K(x,y,t)|\to 0$ となる (上記の $\hat{K}$ の指数の肩の計算参照). 故に, Kf が (x,t) 空間で負の最小値 μ をとる点が存在する. すると E.Hopf の最大値の原理によって Kf は実は (x,t) 空間において恒等的に負の定数 μ に等しくなってしまう. 故に, 至るところ $K(x,y,t)\ge 0$ (実は正, **補註 1** 参照) である.

$\hat{K}$ を K に戻す逆 Fourier 変換 $\xi' \mapsto x'$ を行うには次の等式が有効である.

$$h(x)=\int_{R^{n-1}} e^{i\langle x',\xi'\rangle-\rho x_1}\,d\xi'=\int_{S^{n-2}} \frac{(2\pi)^{1-n}(n-2)!\,dS_{\xi'}}{(x_1+i\langle x',\xi'\rangle)^{n-1}}=\frac{\Gamma(\frac{n}{2})x_1}{\pi^{\frac{n}{2}}|x|^n}. \tag{6}$$

これは半空間における Poisson 核である. そこで,

$$\begin{aligned} k_m(x,y,t)&=\int_{R^{n-1}} e^{i\langle x'-y',\xi'\rangle-(2m+1)\rho t} w_m(x_1,\rho)w_m(y_1,\rho)\,d\xi' \\ &=\sum_{j,k=0}^{m}\binom{m}{j}\binom{m}{k}\frac{x_1{}^j y_1{}^k}{j!\,k!}h_{j+k+1}((2m+1)t+x_1+y_1,x'-y'), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\text{ただし}\quad h_p(x)=-2^p\partial^p h/\partial x_1{}^p \ \ (p\ge 1)$$

とおくと, 基本解は次のようになる ((4) 参照).

$$K(x,y,t)=\sum_{m=0}^{\infty}k_m(x,y,t). \tag{8}$$

この級数は広義一様に絶対収束する (§6 において証明する).

なお, ここまでの計算を追跡しなくても一向に構わない. 要するに

$$\sum_{p=0}^{2m}\frac{a_{m,p}(x_1,y_1)}{\{(2m+1)t+x_1+y_1+i\langle x'-y',\,\xi'\rangle\}^{n+p}} \quad (\xi'\in S^{n-2},\ m=0,1,2,\cdots)$$

が (1) をみたすように 2 変数の p 次斉次対称多項式 $a_{m,p}(x_1,y_1)$ を定めればよい. このように, 連続的なパラメータを含む有理函数の形をした特殊解が基本解を生成するということは, 方程式 (1) の幾何学的特性に照らしても合理的である (§3 参照). なお, (8) の左辺は $x'-y'$ の急減少函数であるが右辺の各項はそうではない. そのせいで各点ごとの収束を確かめるのが難しい.

他方, (8) の級数は有界作用素の t に関して一様な強収束極限である. 実際,

$$\begin{aligned} 0&\le\int_{R^{n-1}}d\xi'\int_0^{+\infty}\overline{\hat{f}(x_1,\xi')}dx_1\int_0^{+\infty}\hat{K}(x_1,y_1,\xi',t)\hat{f}(y_1,\xi')dy_1 \\ &=\int_{R^{n-1}}\sum_{m=0}^{\infty}e^{-(2m+1)\rho t}\left|\int_0^{+\infty}w_m(x_1,\rho)\hat{f}(x_1,\xi')dx_1\right|^2 d\xi' \end{aligned}$$

$$\leq \int_{R^{n-1}} \sum_{m=0}^{\infty} \left| \int_0^{+\infty} w_m(x_1,\rho)\hat{f}(x_1,\xi')dx_1 \right|^2 d\xi' = \int_{R^{n-1}} d\xi' \int_0^{+\infty} |\hat{f}(x_1,\xi')|^2 dx_1 .$$

故に, $L^2(\mathbf{R}^n_+)$ に属する任意の $f(x)$ と任意の正の数 ε をとり, それに応じて番号 M を適当に選べば, 任意の正の数 t と任意の番号 $M'>M$ について

$$\int_{R^n_+} \left| \sum_{m=M+1}^{M'} \int_{R^n_+} k_m(x,y,t)f(y)dy \right|^2 dx < \varepsilon$$

となる. $t\downarrow 0$ のとき Kf は f に強収束する. K は $L^2(\mathbf{R}^n_+)$ における非負対称作用素 (縮小写像) である. すなわち, (1) の右辺を $L^2(\mathbf{R}^n_+)$ の上に Friedrichs 拡張すると, それが生成する半群の核表現が基本解 K である ((46) 式参照).

さらに, 基本解は非負で積分が 1 であるから, Riesz の凸型の補間定理によって, 基本解は $L^p(\mathbf{R}^n_+)$ $(1<p<\infty)$ からそれ自身への有界作用素である. 実は, (8) 式の一般項がすでに L^p-空間における有界作用素である. 何故ならば,

$$x_1^j y_1^k h_{j+k+1}((2m+1)t+x_1+y_1, x'-y')$$

は x' に関して可積分だから $L^p(\mathbf{R}^{n-1})$ における有界作用素となりそのノルムは $x_1^j y_1^k (x_1+y_1)^{-j-k-1}$ の定数倍以下である. Hardy の不等式によってこの函数は $L^p(0,+\infty)$ における有界作用素の核となる ([HLP],n^o.318).

§2 等式 (4) の証明

この節では u,v は区間 $[0,+\infty)$ を動く変数とする. Laguerre の多項式は次の (9),(10) のどれで定義してもよい.

$$L_m(u) = \frac{e^u}{m!}\frac{d^m}{du^m}(u^m e^{-u}) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-u)^k}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=R}\frac{z^m e^{u-uz}dz}{(z-1)^{m+1}}, \quad (9)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} c^m L_m(u) = \frac{1}{1-c}\exp\left(\frac{-uc}{1-c}\right) \quad (|c|<1). \quad (10)$$

(4) のもとになる等式は ([Sz., p.102], [EMOT., vol.II, p.189] 参照)

$$\sum_{m=0}^{\infty} L_m(u)L_m(v)c^m = \frac{1}{1-c} I_0\left(\frac{2\sqrt{uvc}}{1-c}\right)\exp\left\{-\frac{(u+v)c}{1-c}\right\} \quad (|c|<1). \quad (11)$$

(11) を確かめる．左辺を S とおき (9),(10) を代入すると，$R>\frac{1}{1-|c|}$ ならば

$$S=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}e^{v-zv}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{cz}{z-1}\right)^m L_m(u)\frac{dz}{z-1}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\exp\left\{v-vz-\frac{ucz}{(1-c)z-1}\right\}\frac{dz}{(1-c)z-1}.$$

$\zeta=(1-c)z-1$ と変数変換すると

$$(1-c)S\exp\frac{(u+v)c}{1-c}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R'}\exp\left(\frac{-v\zeta}{1-c}\right)\exp\left\{\frac{-cu}{(1-c)\zeta}\right\}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$=\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(-v)^k(-cu)^l}{k!l!(1-c)^{k+l}}\int_{|\zeta|=R'}\frac{\zeta^{k-l-1}}{2\pi i}d\zeta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(uvc)^k}{k!^2(1-c)^{2k}}=I_0\left(\frac{2\sqrt{uvc}}{1-c}\right).$$

(10) の u を $-|u|$ で置き換えると c の冪級数 (10) の優級数が得られる．それは $|c|<1$ では絶対収束するから (11) の辺々も $|c|<1$ ならば絶対収束して u,v の整函数となる．さらに，次の不等式が成り立つ ([Sz.,p.176], [Sh_5,p.180]).

$$u>0,\ m\geq 1 \text{ ならば } \quad L_m(u)^2+\frac{1}{m}uL'_m(u)^2<e^u. \tag{12}$$

§3　半空間の特別な計量 g_1

この節では方程式 (1) の幾何学的特徴を考察し，(1) のどのような基本解も次元 n とは無関係に少なくとも 4 個の変数を含まねばならないことを示す．

(1) の右辺の作用素は $\mathbf{R}^n_+$ にどんな Riemann 計量を導入しても Laplace-Beltrami の作用素にはならない．これを対称にする体積要素は Lebesgue 測度だけなので Euclid 計量は基本解に確かに関係しているが，基本解の成り立ちを Euclid 計量だけで説明することはできない．実は，もう一つの計量

$$g_1=\frac{1}{x_1}\sum_{j=1}^{n}(dx_j)^2 \tag{13}$$

も関係している (§5 参照．なお，g_1 は双曲空間の計量ではない).

計量 g_1 を備えた Riemann 空間 $\mathbf{R}^n_+$ の相似変換群を G とする. x から y への変数変換 T が相似変換であるとは, T が $\mathbf{R}^n_+$ からそれ自身の上への C^2-級の同相写像であって, 適当な正の定数 c を選べば $\mathbf{R}^n_+$ の各点 x において

$$\frac{1}{y_1}\sum_{\alpha=1}^{n}(dy_\alpha)^2=\frac{c}{x_1}\sum_{j=1}^{n}(dx_j)^2 \qquad (y=Tx) \tag{14}$$

となることである. 次のことを証明する.

$$\dim G=\tfrac{n^2-n}{2}+1. \tag{15}$$

つまり G の元が連続的な実の方向パラメータを最大限 $\frac{n^2-n}{2}+1$ 個含むことを示す. 無限小変換 $\mathcal{T}$ と絶対値の小さな実数 s をとり $T=\exp(s\mathcal{T})$ とすると,

$$y_\alpha=x_\alpha+s\,\mathcal{T}_\alpha(x)+O(s^2)\ \ (\alpha=1,2,\cdots,n), \quad c=1+s\,\mu+O(s^2) \tag{16}$$

となる. $\mathcal{T}_\alpha(x)$ は C^2-級の函数, μ は実の定数, $O(s^2)$ は C^2-級の位相で広義一様であるとする. これを (14) に代入して分母を払い辺々の s^1 の係数を較べる. 無限小量の連比 $dx_1:dx_2:\cdots:dx_n$ を $e_1:e_2:\cdots:e_n$ とすると,

$$2x_1\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{T}_\alpha}{\partial x_\beta}e_\alpha e_\beta=\{\mu x_1+\mathcal{T}_1(x)\}\sum_{j=1}^{n}e_j^2. \tag{17}$$

これが無限小変換 (G の Lie 代数の元) を特徴づける条件で, 辺々は x の函数を係数とする e の 2 次形式である. $e_\alpha e_\beta$ の係数を比較すると

$$2x_1\frac{\partial\mathcal{T}_\alpha}{\partial x_\alpha}=\mu x_1+\mathcal{T}_1\ \ (1\le\alpha\le n), \qquad \frac{\partial\mathcal{T}_\beta}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial\mathcal{T}_\gamma}{\partial x_\beta}=0 \quad (1\le\beta<\gamma\le n).$$

$\alpha=1$ の方程式の解は $\mathcal{T}_1(x)=\mu x_1+\sqrt{x_1}\psi(x')$ である ($\psi(x')$ は x' のみの函数). すると $2\le\alpha\le n$ の方程式により

$$\frac{\partial\mathcal{T}_\alpha}{\partial x_\alpha}=\mu+\frac{\psi}{2\sqrt{x_1}}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial\mathcal{T}_\alpha}{\partial x_\alpha}=-\frac{\psi}{4x_1\sqrt{x_1}} \quad (2\le\alpha\le n).$$

他方, $(\beta,\gamma)=(1,\alpha)$ の方程式と $\mathcal{T}_1$ の形から

$$\frac{\partial\mathcal{T}_\alpha}{\partial x_1}=-\frac{\partial\mathcal{T}_1}{\partial x_\alpha}=-\sqrt{x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\mathcal{T}_\alpha}{\partial x_1}=-\sqrt{x_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha^2} \quad (2\le\alpha\le n).$$

$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial \mathcal{T}_\alpha}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \mathcal{T}_\alpha}{\partial x_1}$ だから恒等的に $\psi=0$, $\mathcal{T}_1(x)=\mu x_1$, $\frac{\partial \mathcal{T}_\alpha}{\partial x_\alpha}=\mu$ $(2\leq\alpha\leq n)$ である. すると $\beta=1,\gamma\geq 2$ の方程式によって $\mathcal{T}_2(x),\cdots,\mathcal{T}_n(x)$ は x_1 に依存しない. 次に, (β,γ) の方程式の辺々を x_β または x_γ で偏微分すると $\frac{\partial^2 \mathcal{T}_\beta}{\partial x_\gamma^2}=0$ $(1\leq\beta,\gamma\leq n,\ \beta\neq\gamma)$ となる. さらに, $n\geq 3$ として相異なる番号 α,β,γ をとり $t_{\alpha\beta\gamma}=\frac{\partial^2 \mathcal{T}_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma}$ とおくと, $t_{\alpha\beta\gamma}$ は α,β については反対称, β,γ については対称だからすべて恒等的に 0 である. 実際, $t_{\alpha\beta\gamma}=-t_{\beta\alpha\gamma}=-t_{\beta\gamma\alpha}=t_{\gamma\beta\alpha}=t_{\gamma\alpha\beta}=-t_{\alpha\gamma\beta}=-t_{\alpha\beta\gamma}$. 以上により, 無限小変換の一般形は次のようになる.

$$\mathcal{T}_1(x)=\mu x_1,\quad \mathcal{T}_\alpha(x)=\mu x_\alpha+\delta_\alpha+\sum_{\beta=2,\beta\neq\alpha}^{n}\varepsilon_{\alpha\beta}x_\beta\ (2\leq\alpha\leq n). \tag{18}$$

ここで, $(\mu,\delta_\alpha,\varepsilon_{\beta\gamma})$ は $\varepsilon_{\beta\gamma}+\varepsilon_{\gamma\beta}=0$ をみたす実の定数の組である. このような組は $\frac{n^2-n}{2}+1$ 次元のベクトル空間をなす. こうして (15) が証明された.

無限小変換が生成する変換のほかに $\mathbf{R}^{n-1}$ の対称変換も G に属する. 従って, 相似変換はすべて次の 4 種類の変換を高々有限個合成すれば得られる.

1° $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto(x_1,x_2+\delta_2,\cdots,x_n+\delta_n)$, $\delta_2,\cdots,\delta_n$ は実の定数,

2° $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto(x_1,\sum_{k=2}^n r_{2k}x_k,\cdots,\sum_{k=2}^n r_{nk}x_k)$,
$(r_{jk})_{j,k=2}^n$ は実の定直交行列で行列式は 1,

3° $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto(x_1,-x_2,x_3,\cdots,x_n)$, $\mathbf{R}^{n-1}$ の対称変換,

4° $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto(cx_1,cx_2,\cdots,cx_n)$, c は正の定数.

線要素 g_1 を変えない C^2-級の同相写像の群 ($\mathbf{R}^n_+$ の合同変換群) を γ で表す. γ は 1°, 2°, 3° の変換が生成する G の部分群であるから $\mathbf{R}^{n-1}$ の合同変換群と同型である. $\mathbf{R}^n_+\times\mathbf{R}^n_+$ の 2 点 $(x,y),(\hat{x},\hat{y})$ をとると, $Tx=\hat{x}$ かつ $Ty=\hat{y}$ をみたす合同変換 T が存在するのは $x_1=\hat{x}_1, y_1=\hat{y}_1, |x'-y'|=|\hat{x}'-\hat{y}'|$ のときかつそのときに限る. この関係は $\mathbf{R}^n_+\times\mathbf{R}^n_+$ に同値律 $(x,y)\sim(\hat{x},\hat{y})$ を定める. 商空間 $\mathbf{R}^n_+\times\mathbf{R}^n_+/(\sim)$ は 3 次元であるから, 方程式 (1) のどの基本解も少なくとも商空間の座標と時間を合わせた 4 個の変数を含まねばならない.

(2) 式で定義した $K(x,y,t)$ はちょうど 4 変数 $x_1, y_1, |x'-y'|, t$ の函数であるから, 方程式 (1) の最も簡単な基本解である. これがこの節の結論である. なお, 論証は É.Cartan [C., n^o.260] に倣った.

§4　測地距離函数

g_1 で測った 2 点 a, b の間の測地距離 (a, b を結ぶ求長可能な曲線の長さの下限) を $R(a,b)$ と書き, これを a, b の座標だけで表したい. それには, 両端点 a, b に関する対称性を保つように測地線を表現すればよい.

最初に結論をまとめておく. 測地距離は相似変換に関しては $\frac{1}{2}$ 次斉次である ($c>0$ ならば $R(ca,cb)=\sqrt{c}R(a,b)$). 2 点が $a'=b'$ をみたすならば測地線は半直線の線分で両側に延長すれば長さが無限大になる. それ以外の測地線を最大限に延ばすと有限な長さで両側で境界に到達する. 計量を境界まで拡張することはできないが, 境界の任意の 2 点は内部を通る測地線によって結ばれる.

$x_1|\xi|^2=1$ をみたす補助的な $\mathbf{R}^n$ の点 ξ を導入し, 弧長のパラメータを s として, 測地線 $(x(s), \xi(s))$ を微分方程式で表すと,

$$\frac{dx_j}{ds}=x_1\xi_j\ (1\leq j\leq n),\quad \frac{d\xi_1}{ds}=-\frac{1}{2}|\xi|^2,\quad \frac{d\xi_j}{ds}=0\ (2\leq j\leq n). \tag{19}$$

$\xi'=(\xi_2,\cdots,\xi_n)$ は一定である. まず $\xi'=0$ の場合, 測地線の上では x' が一定で x_1 軸に平行な線分である. (19) によって $\frac{d}{ds}\sqrt{x_1}=1/2$ であるから

$$a'=b' \text{ ならば }\quad R(a,b)=2|\sqrt{a_1}-\sqrt{b_1}|. \tag{20}$$

次に $\xi'\neq 0$ の場合, 測地線は x_1-軸に平行な 1 本の直線とベクトル $(0,\xi')$ のなす 2 次元平面に含まれる. それを (x_1,x_2)-平面としても一般性を失わない. x_3 以降は定数なので省略すると, 測地線のパラメータ表示は

$$x_1(s)=\frac{1}{2}(1+\cos\frac{s}{\sqrt{v_1}})v_1,\quad x_2(s)-v_2=\frac{1}{2}(\frac{s}{\sqrt{v_1}}+\sin\frac{s}{\sqrt{v_1}})v_1\,. \tag{21}$$

これは x_2-軸の上を走る自転車の車輪の 1 点の軌跡つまりサイクロイドの弧で, 車輪の直径 v_1 と位相のずれ v_2 によって異なる. v_1 のことをこのサイクロイドの高さ, $v=(v_1,v_2)$ のことを頂点と呼ぶことにする. 頂点に関してこれは左右対称で $-\sqrt{v_1}\pi<s<\sqrt{v_1}\pi$ が 1 周期である. サイクロイド上では

$$\frac{1}{x_1(s)}\sum_{j=1}^n(\frac{dx_j}{ds})^2(ds)^2=(ds)^2.$$

つまり 2 点を表す s の値の差が計量 g_1 で測った測地距離である.

サイクロイドの形は一定で縦横の長さは Euclid 計量では v_1 と πv_1 である．測地距離を 2 点の座標で表す問題は初期値問題ではなく境界値問題である．すなわち，指定した 2 点を通るように高さ v_1 と位相のずれ v_2 を調節すればよい．そのとき，頂点が測地線分の中にあるのか，或いは延長上にあるのかによって測地距離の函数形が異なるので，どちらの場合なのかを 2 点の座標だけで予め判定する必要がある．

x_1 を x_2 の函数とみなすと測地線の微分方程式は

$$2x_1\frac{d^2x_1}{dx_2{}^2}+\left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)^2+1=0 \tag{22}$$

となる．相似変換で (22) は変らない (v_1 は x_1 と同じ変換をうける)．測地線ごとに量 $x_1(\frac{dx_1}{dx_2})^2+x_1$ は定数で，頂点では $x_1=v_1$, $\frac{dx_1}{dx_2}=0$ であるから

$$\left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)^2=\frac{v_1-x_1}{x_1}. \tag{23}$$

$\frac{dx_2}{ds}>0$ と向きづけすれば $dx_2=\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{v_1-x_1}}|dx_1|$ となる．

頂点が測地線分の中にあるのか延長上にあるのかは，次の 2 つの量 λ,μ の大小によって判定することができる．どちらも相似変換で不変な量である．

$$\lambda(a,b)=\frac{|a'-b'|}{\max(a_1,b_1)},\quad \mu(a,b)=\int_m^1\frac{\sqrt{t}\,dt}{\sqrt{1-t}}\quad ただし\ m=\frac{\min(a_1,b_1)}{\max(a_1,b_1)}. \tag{24}$$

1. $\lambda(a,b)<\mu(a,b)$ **の場合．** $a_1\neq b_1$ である ($a_1=b_1$ ならば $\mu=0$ となってしまう)．すると，

$$\int_{\min(a_1,b_1)}^{\max(a_1,b_1)}\frac{\sqrt{t}\,dt}{\sqrt{v_1-t}}=|a'-b'|,\qquad v_1\geq\max(a_1,b_1), \tag{25}$$

をみたす v_1 が一意的に存在して $v_1>\max(a_1,b_1)$ である．実際，$a_1>b_1$ の場合，左辺は単調減少で $v_1=a_1$ のとき $a_1\mu(a,b)$ に等しく，$v_1\to+\infty$ のとき 0 となるからである．故に，この高さのサイクロイドを 3 点が v,a,b の順に通る．点が a から b まで移動すれば x_1 は a_1 から b_1 まで減少し，x_0 は $|a'-b'|$ だ

け増加する．他方，$\cos\frac{s}{2\sqrt{v_1}}$ の値は $\sqrt{a_1/v_1}$ から $\sqrt{b_1/v_1}$ まで減少し，この間の s の増分が測地距離 $R(a,b)$ である．故に，

$$\frac{R(a,b)}{2\sqrt{v_1}}=\mathrm{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{\min(a_1,b_1)}}{\sqrt{v_1}}-\mathrm{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{\max(a_1,b_1)}}{\sqrt{v_1}}. \tag{26}$$

ただし，$0\leq y\leq 1$ ならば $0\leq\mathrm{Cos}^{-1}y\leq\frac{\pi}{2}$ とする．v_1 は (25) の根である．

2．$\lambda(a,b)>\mu(a,b)$ の場合．

$$\int_{a_1/v_1}^{1}\frac{\sqrt{t}\,dt}{\sqrt{1-t}}+\int_{b_1/v_1}^{1}\frac{\sqrt{t}\,dt}{\sqrt{1-t}}=\frac{|a'-b'|}{v_1},\qquad v_1\geq\max(a_1,b_1), \tag{27}$$

をみたす v_1 が一意的に存在する．実際，右辺は単調減少で $v_1\to+\infty$ のとき 0 になり，左辺は単調増加で，$v_1=\max(a_1,b_1)$ では右辺の方が大きいからである．故に，この高さのサイクロイドを 3 点が a,v,b の順に通る．点が a から b まで移動すれば x_1 は a_1 から v_1 まで増加してまた b_1 まで減少し，x_0 は $|a'-b'|$ だけ増加する．他方，$\cos\frac{s}{2\sqrt{v_1}}$ の値は $\sqrt{a_1/v_1}$ から 1 まで増加してまた $\sqrt{b_1/v_1}$ まで減少する．初めの s の増分が $R(a,v)$，後の s の増分が $R(v,b)$ で，$R(a,b)=R(a,v)+R(v,b)$ である．故に，v_1 は (27) の根として

$$\frac{R(a,b)}{2\sqrt{v_1}}=\mathrm{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{v_1}}+\mathrm{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{v_1}}. \tag{28}$$

3．特別な場合． $\lambda=\mu$ の場合，$v_1=\max(a_1,b_1)$ が (25) と (27) の共通根で，(26) と (28) の右辺の値が一致する．故に，(25) と (26) の組，(27) と (28) の組は連続的に一方から他方に移行する．次に，(26) の右辺が 0 ならば $a_1=b_1$，すると (25) によって $a'=b'$ つまり $a=b$ である．他方，(28) の右辺が 0 ならば $a_1=b_1=v_1$，すると (27) によって $a'=b'$ つまり $a=b$ である．

4．測地線の全長． まず $a'=b'$ の場合，測地線分を最大限に延長すれば境界点から無限遠方までの半直線で全長は無限大である ((20) 式)．次に $a'\neq b'$ の場合，測地線はサイクロイドの弧である．高さ v_1 は (25) または (27) から算出され，高さ v_1 のサイクロイドの全長は (28) によって $2\pi\sqrt{v_1}$ に等しい．

5．境界点同士の距離． サイクロイドの両端の近くに a,b があるとして，各々を相異なる境界点に近づける．すると，$|a'-b'|$ は $|a-b|$ に収束し，高さは

(27) 式で調節されながら $|a-b|/\pi$ に収束する．こうして (28) から

$$a, b \text{ がどちらも境界点ならば} \quad R(a,b)=2\sqrt{\pi|a-b|}. \tag{29}$$

境界の 2 点を結ぶ測地線はその 2 点を 1 周期の両端とするサイクロイドで，内部を通り Euclid 計量の法線方向から 2 点に到達する．

6. 半直線からサイクロイドへの連続的移行. (20) は地面に無限に近い部分を虫眼鏡で拡大した式である．実際，(25) において v_1 および $a_1 : b_1$ を一定にして a, b を同じ境界点に近づけると $|a'-b'|\downarrow 0$ となり，(26) から (20) が導かれる．または，x_2 を x_1 の函数とみなす．そうすると (22) は

$$2x_1\frac{d^2x_2}{d{x_1}^2}=\frac{dx_2}{dx_1}+\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^3 \tag{22$'$}$$

となってこれも相似変換で不変な方程式である．1 回積分すると

$$\mathrm{Tan}^{-1}\frac{dx_2}{dx_1}=\mathrm{Sin}^{-1}(c\sqrt{x_1}) \qquad (c \text{ は実の定数}). \tag{30}$$

Tan^{-1}, Sin^{-1} の値は $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ までとする．c を正,0, 負と変えれば半直線が連続的にサイクロイドに変わる様子が分る．

Riemann 空間における 2 点間の測地距離は，計量を特徴づける重要な函数である．この函数を 2 点の座標だけで大域的に表現することのできる，どんな計量にも通用する方法はないので，個別の計量ごとに考察せねばならない．

計量 g_1 の場合，2 点がどんな位置関係にあっても (20),(26),(28),(29) のうちの何れかの式に当てはまる．v_1 を決めるために，位置関係に応じて場合わけをして陰函数の定理をその都度用いた．そのせいで $R(a,b)$ が a, b に滑らかに依存するのか否かが分り難くなった．

測地距離を導出するもう一つの方法は造形方程式 (eikonal equation) を解くことである．$\Gamma(a,b)=R(a,b)^2$ とおき，a を動点，b を定点とすると，計量 g_1 の造形方程式は $a_1\sum_{j=1}^{n}(\frac{\partial\Gamma}{\partial a_j})^2=4\Gamma$ である ([H, n^o.58] 参照)．実は，造形方程式の大域的な解はすでに基本解に含まれている．そのことを次に述べる．

§5 基本解から測地距離の表現式を導くこと

S.Minakushisundaram - Å.Pleijel [MP] は次のことを示した.

計量 g を備えた n 次元 Riemann 空間における Laplace-Beltrami の作用素を $\triangle_g$ として, 熱伝導方程式 $\frac{\partial}{\partial t}u=\triangle_g u$ の基本解を $Z(x,y,t)$ で表すと, x,y を一定にして任意の整数 $J(\geq 0)$ をとれば, $t\downarrow 0$ としたとき,

$$Z(x,y,t)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{r(x,y)^2}{4t}}\left\{\sum_{p=0}^{J}t^p u_p(x,y)+O(t^{J+1})\right\} \tag{31}$$

となる. $r(x,y)$ は計量 g で測った測地距離, $u_p(x,y)$ は J.Hadamard の係数と呼ばれ $x=y$ の近傍で滑らかな函数である ([H.,n^o61]). これは Riemann 空間の上の熱伝導方程式の基本解を Hadamard の理論に則って構成した最初の論文で, 二つの大きな発見を含んでいた. 第一に, Riemann 空間においても基本解の第一近似は Gauss の核と同様 (31) の形になること. 第二に, レゾルヴェント核や波動方程式の基本解に冪級数展開の係数として現れた Hadamard 係数が, 熱伝導方程式の基本解にも漸近級数の係数として現れることである.

本稿の方程式 (1) の右辺は Laplace-Beltrami の作用素ではないが, 内部の 2 点 a,b を一定にして $t\downarrow 0$ とすれば $K(a,b,t)$ が同様の漸近展開をもつ.

$$K(a,b,t)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-R(a,b)^2/(4t)}\left\{\sum_{p=0}^{J}t^p u_p(a,b)+O(t^{J+1})\right\}. \tag{32}$$

$R(a,b)$ は計量 g_1 の測地距離函数, u_p は Hadamard 係数で, u_0 の形は (37) 式に示す. この節の目標は次の等式から $R(a,b)^2$ を導くことである.

$$R(a,b)^2=-4\lim_{t\downarrow 0}\{t\log K(a,b,t)\}. \tag{33}$$

(2) 式の ξ' を $\frac{1}{t}\zeta'$ で置き換え, $\sigma=\sqrt{\sum_{j=2}^{n}\zeta_j^2}$ とおき, $I_0(z)$ を積分で表して (2) 式を書き直すと

$$K(a,b,t)=\frac{1}{(2\pi t)^n}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_{R^{n-1}}e^{F/t}\frac{\sigma}{\sinh\sigma}d\zeta',\quad (a,b\in\mathbf{R}^n_+,\ t>0),$$

$$F=F(\zeta',\theta)=i\langle a'-b',\zeta'\rangle-\frac{(a_1+b_1)\sigma}{\tanh\sigma}+\frac{2\sqrt{a_1b_1}\sigma}{\sinh\sigma}\cos\theta,\quad \begin{matrix}\zeta_j=\xi_j+i\eta_j\\ (2\leq j\leq n).\end{matrix}\tag{34}$$

次に, $\lambda=(\sqrt{a_1}-\sqrt{b_1})^2$, $\mu=(\sqrt{a_1}+\sqrt{b_1})^2$, $F_0(\sigma)=\frac{\sigma}{2}(\lambda\coth\frac{\sigma}{2}+\mu\tanh\frac{\sigma}{2})$ とおくと, $F(\zeta',0)=i\langle a'-b',\zeta'\rangle-F_0(\sigma)$ となる. F の停留点を求める方程式

$$\frac{\partial F}{\partial\zeta_2}=\cdots=\frac{\partial F}{\partial\zeta_n}=\frac{\partial F}{\partial\theta}=0\tag{35}$$

の解は純虚ベクトル $\zeta'=i\eta_0'$ と $\theta=0$ の組である. $\eta_0'=(\eta_{02},\cdots,\eta_{0n})$ は実ベクトルで, 改めて $\rho=|\eta_0'|=(\sum_{j=2}^{n}{\eta_{0j}}^2)^{\frac{1}{2}}\geq 0$ とおくと (35) は

$$(a_j-b_j)\rho=G'(\rho)\eta_{0j}\quad(2\leq j\leq n)$$

となる. ただし, $G(\rho)=-F_0(\sigma)$, つまり

$$G(\rho)=\frac{\rho}{2}(\mu\tan\frac{\rho}{2}-\lambda\cot\frac{\rho}{2}),\quad G'(\rho)=\frac{(\rho+\sin\rho)\mu}{2(1+\cos\rho)}+\frac{(\rho-\sin\rho)\lambda}{2(1-\cos\rho)}.$$

区間 $0<\rho<\pi$ では $G'(\rho)>0$ であるから $a'-b'=$正の数$\times\eta_0'$ である. $\rho=|\eta_0'|$ は方程式 $|a'-b'|=G'(\rho)$ の根でなくてはならない, つまり

$$2|a'-b'|=\frac{(\rho+\sin\rho)\mu}{1+\cos\rho}+\frac{(\rho-\sin\rho)\lambda}{1-\cos\rho},\quad 0<\rho<\pi.\tag{36}$$

$G'(\rho)$ は $G'(0)=0$, $\lim_{\rho\uparrow\pi}G'(\rho)=+\infty$ をみたし,

$$G''(\rho)=P\mu+Q\lambda,\quad P=\frac{2\cos\frac{\rho}{2}+\rho\sin\frac{\rho}{2}}{\cos^3\frac{\rho}{2}}>0,\quad Q=\frac{2\sin\frac{\rho}{2}-\rho\cos\frac{\rho}{2}}{\sin^3\frac{\rho}{2}}>0.$$

故に, $G'(\rho)$ は $0\leq\rho<\pi$ において単調増加であり, (36) の根 ρ が一意的に存在する. 点 $(i\eta_0',0)$ における $-F$ の Hesse 行列の固有値は $\frac{2\sqrt{a_1b_1}\rho}{\sin\rho}$ (θ の方向), $G''(\rho)$ (η_0' の方向), および $\frac{G'(\rho)}{\rho}$ (η_0' に直交する $n-2$ 次元の方向) であり, $(i\eta_0',0)$ は F の極小点 (実は F の実部を最小にする点) である. すると,

$$u_0(a,b)=(a_1b_1)^{-\frac{1}{4}}\left\{\frac{2\sin\rho}{\rho G''(\rho)}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{2\rho}{G'(\rho)}\right\}^{\frac{n-2}{2}}\quad(\rho\text{ は (36) の根}).\tag{37}$$

さらに詳しく計算すれば u_1 以降も得られる (**補註 2** 参照).

極小値 $F(i\eta_0', 0) = G(\rho) - \rho G'(\rho)$ の -4 倍を Γ とおく.

$$\Gamma(a,b) = \frac{2\rho^2\mu}{1+\cos\rho} + \frac{2\rho^2\lambda}{1-\cos\rho}.$$

Γ は造形方程式

$$a_1 \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial\Gamma}{\partial a_j}\Big)^2 = 4\Gamma \tag{38}$$

をみたす. a, b がともに定点 $(\alpha, 0)$ $(\alpha > 0)$ の無限小近傍にあれば $\Gamma = \frac{|a-b|^2}{\alpha}$ となりこれはまさしく線要素 g_1 である. 故に, $\Gamma(a,b) = R(a,b)^2$ すなわち

$$R(a,b)^2 = \frac{2\rho^2}{1+\cos\rho}(\sqrt{a_1} + \sqrt{b_1})^2 + \frac{2\rho^2}{1-\cos\rho}(\sqrt{a_1} - \sqrt{b_1})^2, \tag{39}$$

ただし, ρ は方程式 (36) の根である.

$$\frac{2|a'-b'|}{(\sqrt{a_1}+\sqrt{b_1})^2} = \frac{\rho+\sin\rho}{1+\cos\rho} + \frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{b_1})^2}{(\sqrt{a_1}+\sqrt{b_1})^2}\frac{\rho-\sin\rho}{1-\cos\rho}, \quad 0 \le \rho < \pi. \tag{36$'$}$$

(36′) と (39) は境界まで正しい. 実際, (36′) の左辺が非常に大きければ a, b は境界の相異なる 2 点に近く ρ は π に近いから, (29) 式が再び得られる. また逆に $a' = b'$ とすれば (20) が再び得られる.

なお, (39),(36′) において a_1, b_1 についた根号を完全になくすることはできない. その理由は (30) 式をみると領ける. しかし, x_1 の代わりに $\sqrt{x_1}$ を独立変数に取り直すと方程式 (1) に多項式でない係数が現れてしまう.

この節の論法では測地線がサイクロイドであることがすぐには分らず, 漸近展開式 (32) も境界までは通用しない. それがこの論法の限界である. しかし, 境界上は別として $R(a,b)^2$ は $\mathbf{R}^n_+ \times \mathbf{R}^n_+$ の至るところ 2 点の実解析函数であることが, 上の考察の副産物として分る. 実際, $G(\rho)$ は ρ, a_1, b_1 の実解析函数, (36′) も平方すれば実解析的な方程式で, つねに $G''(\rho) > 0$ だからである. 一般に実解析的な計量を備えた空間の測地距離の 2 乗は $a = b$ の近傍では 2 点の実解析函数である ([H],n^o.58). しかし, 大域的な実解析性は決して自明ではない. 球面や円柱などと位相同型な実解析的空間の場合, C^1-級ですらない.

§6　級数 (8) の収束

基本解を表す級数 (8) の一般項 $k_m(x,y,t)$ は次の形をしていた.

$$k_m(x,y,t)=\sum_{j,k=0}^{m}\binom{m}{j}\binom{m}{k}\frac{x_1^{\,j}y_1^{\,k}}{j!\,k!}h_{j+k+1}((2m+1)t+x_1+y_1,x'-y'). \tag{7}$$

この節は, Poisson 核に関する等式から始める ((6) 参照).

$$\int_{R^{n-1}}h(x_1,x'-z')h(y_1,z'-y')dz'=h(x_1+y_1,x'-y') \quad (x_1,y_1>0). \tag{40}$$

辺々を x_1 で $p+1$ 回, y_1 で $q+1$ 回偏微分すると ($h_j=-2^j\partial^j h/\partial x_1^{\,j}$ $(j\geq 1)$)

$$\int_{R^{n-1}}h_{p+1}(x_1,x'-z')h_{q+1}(y_1,z'-y')dz'=-h_{p+q+2}(x_1+y_1,x'-y').$$

さらに変数 $z_1(>0)$ を入れて z_1 でも積分すると (u,v は正の定数),

$$\int_{R^n_+}h_{p+1}(x_1+uz_1,x'-z')h_{q+1}(vz_1+y_1,z'-y')dz=\frac{2}{u+v}h_{p+q+1}(x_1+y_1,x'-y').$$

辺々を u で r 回, v で s 回偏微分して $u=v=1$ とおくと

$$\int_{R^n_+}z_1^{\,r}h_{p+r+1}(x_1+z_1,x'-z')z_1^{\,s}h_{q+s+1}(z_1+y_1,z'-y')dz$$
$$=(-1)^{r+s}(r+s)!h_{p+q+1}(x_1+y_1,x'-y') \quad (p,q,r,s=0,1,2,\cdots). \tag{41}$$

この節で用いるもう一つの等式は, $|\alpha|<1$, $|\beta|<1$, $\frac{|u||\alpha|}{1-|\alpha|}+\frac{|v||\beta|}{1-|\beta|}<1$ として

$$\sum_{l,r=0}^{\infty}\alpha^l\beta^r\sum_{p=0}^{l}\sum_{q=0}^{r}\binom{l}{p}\binom{r}{q}\binom{p+q}{p}u^pv^q=\frac{1}{1-(1+u)\alpha-(1+v)\beta+(1+u+v)\alpha\beta}. \tag{42}$$

$l=r$ の部分和をとる (α を $\alpha\omega$ で, β を β/ω で置き換えて辺々を ω で割り円周 $|\omega|=1$ の上で積分すればよい). $\alpha\beta=\gamma$ とすると

$$\sum_{l=0}^{\infty}\gamma^l\sum_{p,q=0}^{l}\binom{l}{p}\binom{l}{q}\binom{p+q}{p}u^pv^q=\frac{1}{\sqrt{D(u,v,\gamma)}}, \tag{43}$$

ただし　$D(u,v,\gamma)=1-2\{(1+u)(1+v)+uv\}\gamma+(1+u+v)^2\gamma^2.$

等式

$$\frac{1}{\sqrt{zw}}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{z+w+(z-w)\cos\theta}\quad(\Re z>0,\Re w>0) \tag{44}$$

を用いると, $(1+2|u|)(1+2|v|)|\gamma|<1$ ならば

$$\sum_{l=0}^{\infty}\gamma^l\sum_{p,q=0}^{l}\binom{l}{p}\binom{l}{q}\binom{p+q}{p}u^pv^q=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-\varphi(u,v,\theta)\gamma},$$

ただし　$\varphi(u,v,\theta)=1+u+v+2uv+2\sqrt{(1+u)(1+v)uv}\cos\theta.$

辺々の γ^l の係数を比較すると

$$\sum_{p,q=0}^{l}\binom{l}{p}\binom{l}{q}\binom{p+q}{p}u^pv^q=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(u,v,\theta)^l d\theta\quad(l=0,1,2,\cdots). \tag{45}$$

左辺の多項式が l に依存する様子を l に依存しない函数 φ の l 乗で表したのである. 根号は積分すればなくなる. $|\varphi(u,v,\theta)|\leq(1+2|u|)(1+2|v|)$ だから

$$\left|\sum_{p,q=0}^{l}\binom{l}{p}\binom{l}{q}\binom{p+q}{p}u^pv^q\right|\leq(1+2|u|)^l(1+2|v|)^l.$$

絶対値記号を外せば右辺は左辺の優級数である.

(7) 式の核 $k_m(x,y,t)$ をもつ積分作用素を $k_m(t)$ で表す. すると, (41) および (42)($u=v=-1$) から直交関係が導かれる.

$$k_m(t)k_{m'}(t')=\delta_{m,m'}k_m(t+t')\quad(t,t'>0,\ m,m'=0,1,2,\cdots). \tag{46}$$

これは K が半群の核表現であることを成分ごとに表した式である.

次に (45) を用いると (7) における j,k に関する和が積分になる.

$$k_m(x,y,t)=\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}\left\{\frac{2s^{n-1}}{(2\pi)^n}\int_{S^{n-2}}\frac{dS_{\xi'}}{r_m{}^n}\int_0^{2\pi}\varphi(su_m,sv_m,\theta)^m d\theta\right\}\Bigg|_{s=1}, \tag{47}$$

ただし　$r_m(x,y,t)=(2m+1)t+x_1+y_1+i\langle x'-y',\xi'\rangle,$
$u_m(x,y,t)=-2x_1/r_m,\quad v_m(x,y,t)=-2y_1/r_m.$

故に,

$$K(x,y,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}\left\{\frac{2s^{n-1}}{(2\pi)^n}\int_{S^{n-2}}\frac{dS_{\xi'}}{{r_m}^n}\int_0^{2\pi}\varphi(su_m,sv_m,\theta)^m d\theta\right\}\bigg|_{s=1}. \quad (48)$$

級数 (8) の収束の証明. $m>0$ ならば $|u_m|<\frac{x_1}{mt}, |v_m|<\frac{y_1}{mt}$ だから

$$|\varphi(su_m,sv_m,\theta)^m|\le(1+\tfrac{2x_1}{mt}s)^m(1+\tfrac{2y_1}{mt}s)^m\le e^{\frac{2x_1+2y_1}{t}s}.$$

$e^{\frac{2x_1+2y_1}{t}s}$ は s の冪級数 $\varphi(su_m,sv_m,\theta)^m$ の優級数である. (48) によって,

$$0\le K(x,y,t)\le\frac{2(n-1)!}{(2\pi)^{n-1}}e^{\frac{2x_1+2y_1}{t}}L_{n-1}\left(-\frac{2x_1+2y_1}{t}\right)\int_{S^{n-2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{|r_m|^n}dS_{\xi'}.$$

精密な不等式ではないが, 級数 (8) が (x,y,t) に関して広義一様に絶対収束することが示された. **証了**

とくに, $x=y$ とすると $k_m(x,x,t)$ は x_1 と t のみの函数で, (46) によって $k_m(x,x,t)=\int_{R^n_+}k_m(x,z,\frac{t}{2})^2dz>0$ である. また, (47) により

$$k_m(x,x,t)=\frac{2^{2-n}\pi^{-\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})\rho_m^n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial w^{n-1}}\int_0^{2\pi}w^{n-1}\{1-4w(1-w)\cos^2\phi\}^m d\phi\bigg|_{w=w_m}, \quad (49)$$

ただし　$\rho_m=(2m+1)t+2x_1,\quad w_m=2x_1/\rho_m.$

$x_1\downarrow 0$ とすると $\rho_m\to(2m+1)t, w_m\to 0$ となるから, $k_m(x,x,t)$ の極限値は $(2n-2)\Gamma(\frac{n}{2})/\{\sqrt{\pi}(2m+1)t\}^n$ である. m に関して加えると,

$$\lim_{x_1\downarrow 0}K(x,x,t)=\frac{(2n-2)\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}t^n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^n}. \quad (50)$$

尤も, (2) の積分記号下で $x=y$, $x_1\downarrow 0$ として ξ' で積分すれば (50) が導かれるから, $K(x,x,t)$ の境界値は (2) だけから分るのである ([Sh$_1$]).

(50) は方程式 (1) の境界における退化の結果である. 実際, 通常の熱伝導方程式 $\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$ の場合, Laplacian の実現の仕方 (境界条件) とは無関係に $Z(x,x,t)$ の漸近展開式 (31) の第 1 項は 定数$\times t^{-\frac{n}{2}}$ となる.

§7　楕円型方程式の基本解

楕円型方程式

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(x_1\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+f(x)=0 \tag{51}$$

の 1 つの基本解は $K(x,y,t)$ を t について積分すれば得られる．すなわち

$$E(x,y)=\int_0^{+\infty}K(x,y,t)dt \tag{52}$$

とおけば $E(x,y)$ は (51) の基本解である．これは x,y に関して $1-n$ 次斉次である ($k>0$ ならば $E(kx,ky)=k^{1-n}E(x,y)$)．k_m の積分を e_m とすると

$$e_m(x,y)=\frac{2}{2m+1}\sum_{j,k=0}^{m}\binom{m}{j}\binom{m}{k}\frac{(2x_1)^j(2y_1)^k}{j!\,k!}(\partial_1^{j+k}h)(x_1+y_1,x'-y').$$

$\frac{1}{2m+1}=\int_0^1 s^{2m}ds$ を代入し，m について加え (44) を用いると

$$E(x,y)=\frac{2(n-2)!}{(2\pi)^n}\int_{S^{n-2}}dS_{\xi'}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{(1-s^2)^{n-2}}{P(s,\theta)^{n-1}}ds,$$

ただし　$P(s,\theta)=(x_1+y_1)(1+s^2)+i\langle x'-y',\xi'\rangle(1-s^2)+4\sqrt{x_1y_1}\,s\cos\theta\,.$

Poisson 核の定義 (6) を代入して $\sinh\lambda=\frac{2s}{1-s^2}$ とおくと

$$E(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_0^{2\pi}h((x_1+y_1)\cosh\lambda+2\sqrt{x_1y_1}\sinh\lambda\cos\theta,x'-y')d\theta. \tag{53}$$

とくに $n=3$ のときは，

$$E(x,y)=\frac{1}{2\pi|x-y||x-\check{y}|}\quad(\text{ただし } \check{y}=(-y_1,y_2,\cdots,y_n)). \tag{54}$$

$|\ \ |$ は Euclid の長さを表す．なお，[GS] では次元低下法を用いて $E(x,y)$ を導出した．計算法は異なるが結果は同じである．

本稿はこの短期共同研究のときに用意した予稿に §3 の結論をつけ加え全般的な字句の修正を施したものである．基本解 K が無限級数になってしまい，今のところ改良できないのは筆者の不徳の致すところである．

補註 1 $t>0, x, y \in \mathbf{R}^n_+$ のとき $K(x,y,t)>0$ である. 実際, (5) 式の後の議論の通り $K \geq 0$ となることを示した後, もう一度 E.Hopf の最大値の原理を用いれば $K>0$ であることが分る. 許斌氏にご指摘いただいた.

補註 2 漸近展開式 (32) の各項も (a,b,t) の $-n$ 次斉次函数である. たとえば初項の場合, (36) の根 ρ は 0 次斉次, $G'(\rho)$ と $G''(\rho)$ は 1 次斉次, (37) の u_0 は $-\frac{n}{2}$ 次斉次だからである. 退化のせいで a または b が境界点のとき $u_0(a,b)$ が定義できず (32) は成り立たないので, (32) と (50) が矛盾している訳ではない. 中野史彦氏にご指摘いただいた.

参考文献

[C] É.Cartan : Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann, *Gauthier-Villars, Paris*, 1946.

[EMOT] A.Erdélyi, W.Magnus, F.Oberhettinger, F.G.Tricomi : Higher Transcendental Functions, Vol.I~III, *McGraw-Hill*, 1953,1955.

[GS] C.Goulaouic - N.Shimakura : Régularité hölderienne de certains problèmes aux limites elliptiques dégénérés, *Ann.Scuola.Norm.Sup.Pisa, Série* IV, 10-1(1983), 79-108.

[H] J.Hadamard : Lectures on Cauchy's Problem for Linear Partial Differential Equations, *Dover Publ.*,1952.

[HLP] G.Hardy-J.Littlewood-G.Pólya : Inequalities, *Cambridge Univ.Press*, 1934.

[MP] S.Minakshisundaram-Å.Pleijel : Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operatos on Riemannian manifolds, *Canad.J.Math.*,1(1949),242-256.

[Sz] G.Szegö : Orthogonal Polynomials, *Colloquium Publications, Vol.XXIII, Amer. Math.Soc.*, 1939.

[Sh1] N.Shimakura : Quelques exemples des ζ-fonctions d'Eptein pour les opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre, *Proc.Japan Acad.*, 45-10(1969),866-871.

[Sh2] N.Shimakura : Quelques exemples des ζ-fonctions d'Eptein pour les opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre II, *Proc.Japan Acad.*, 46-10(1970),1065-1069.

[Sh3] N.Shimakura : Les fonction de Green pour certains opérateurs paraboliques dégénérés dans le demi-espace, *Proc.Japan Acad.*, 47-9(1971),699-704.

[Sh4] N.Shimakura : Sur les ζ-fonctions d'Eptein pour des opérateurs elliptiques dégénérés, *Tôhoku Math.J.*, 26-1(1974),95-131.

[Sh5] 島倉紀夫 : 常微分方程式, 数学シリーズ, 裳華房, 1988(絶版).

(2004 年 7 月 5 日-7 日, 短期共同研究 微分方程式の大局理論と固有値の分布)
(2004 年 9 月 25 日提出)